楕円曲線上の不安定主 G-束のある特徴付け (Recent Topics on Real and Complex Singularities)

山田, 浩嗣

数理解析研究所講究録
1501 巻 2006 年 79-95

楕円曲線上の不安定主 G-束のある特徴付け

北見工業大学　山田浩嗣

概要

P.Slodowy-S.Helmke[S-H] によって、loop 群の立場から単純楕円型特異点が構成されている。一方、斉藤恭司 [S] により単純楕円型特異点に付随する周期写像の研究が成されており、その研究の中心に原始形式の理論がある。このノートでは、単純特異点の場合と同様に Lie 環論的観点から単純楕円型特異点及び原始形式を構成する為の準備として、楕円曲線上の unstable principal G-bundle の Lie 環論的特徴付けを行う（単純特異点の場合は [Y] を参照)。unstable 主 G-束の成す variety が、単純特異点の時に重要であった単純 Lie 環の冪零 variety に対応する。

1 楕円曲線上の holomorphic principal G-bundle

この section では、楕円曲線上の holomorphic principal G-bundle と automorphic factor の関係について解説する（小林 [K] を参照)。

$\tau \in \mathbf{H}$ に対し、E_τ を楕円曲線とし、

$$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow E_\tau \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$$

と置く。この時、主 G-束の topology に対して次が成り立つ：

定理 1.1 *G を連結 Lie 群とする。このとき、楕円曲線 E_τ 上の principal G-bundle の位相同型類は $H^2(E_\tau, \pi_1(G)) \cong \pi_1(G)$ で parametrize される。*

G を連結な complex reductive Lie 群とし、P_G を E_τ 上の holomorphic principal G-bundle とする。このとき, projection $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow E_\tau$ のよる P_G の引き戻し $\pi^* P_G$ は holomorphically trivia であるから、$\Gamma := \pi_1(E_\tau) \cong \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ とおくとき、holomorphic map

$$R : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow G$$

で、

$$R(\gamma + \gamma', z) = R(\gamma, z + \gamma')R(\gamma', z) \qquad \gamma, \gamma' \in \Gamma, \tag{1}$$

を満たし、かつ $P_G \cong \mathbb{C} \times_R G$ となるものが存在する。ここで、$\mathbb{C} \times_R G$ は、$\mathbb{C} \times G$ の次の同値関係による商集合である：

$$(z, g) \sim (z', g') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} z' = z + \gamma \in \Gamma, \\ g' = R(\gamma, z)g. \end{cases}$$

このような R を **automorphic factor** (あるいは **multiplier**) という。

楕円曲線上の holomorphic principal G-bundle の同型類と automorphic factor の関係は、次で与えられる：

補題 1.2 *R, R' を automorphic factor とし、$P_G := \mathbb{C} \times_R G$, $P'_G := \mathbb{C} \times_{R'} G$ とする。このとき、$P_G \cong_{\mathrm{hol}} P'_G$ となる為の必要充分条件は、$h \in G(\mathbb{C}) := \{g : \mathbb{C} \longrightarrow G : \text{holmorphic}\}$ であって、次を満たす物が存在する事である：*

$$R'(\gamma, z) = h(z+\gamma) R(\gamma, z) h(z)^{-1} \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

特に、G が connected かつ simply connected な simple complex Lie group ならば、定理 1.1 より、次の系を得る：

系 1.3 *Elliptic curve E_τ 上の principal G-bundle は、C^∞-trivial。*

よってこの場合、次の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \times G \cong_{\mathrm{hol}} \pi^* P_G \arrow[r] \arrow[d] & P_G \cong_{C^\infty} E_\tau \times G \arrow[d] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\pi"] & E_\tau
\end{tikzcd}$$

2 Harder-Narasimhan reduction と Atiyah-Bott type

この section では、[A-B],[F-M] に従って、holomorphic G-bundle に対し安定性なる概念を定義し、Harder-Narasimhan reduction に付いて解説する。さらに、holomorphic G-bundle の Atiyah-Bott type の定義を与える。

先ず vector bundle の 安定性の定義：

定義 2.1 *$\mathcal{V}$ を E_τ 上の holomorphic vector bundle とする。*

1. *$\mathcal{V}$ の **slope** $\mu = \mu(\mathcal{V})$ を次で定義する：*

$$\mu(\mathcal{V}) := \frac{\deg \mathcal{V}}{\mathrm{rk}\mathcal{V}}.$$

2. *$\mathcal{V}$ が **stable** (resp. **semi-stable**) $\Longleftrightarrow$ 任意の subbundle $\mathcal{V}'$ に対し、$\mu(\mathcal{V}') < \mu(\mathcal{V})$ (resp. $\mu(\mathcal{V}') \leq \mu(\mathcal{V})$) が成り立つ。*

3. *$\mathcal{V}$ が **unstable** $\Longleftrightarrow$ semi-stable でない。*

定義 2.2 *G を complex reductive Lie group 、その Lie 環 を $\mathfrak{g}$ とし、P_G を E_τ 上の holomorphic principal G-bundle とする。このとき、P_G が stable (resp. semi-stable, unstable)*

$\Longleftrightarrow$ P_G の adjoint bundle $\mathrm{ad}(P_G) := P_G \times_{\mathrm{Ad}(G)} \mathfrak{g}$ が stable (resp. semi-stable, unstable) である。

例 2.1 $m \neq 0$ を整数とし、

$$R(1,z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\tau,z) := \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}mz} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\sqrt{-1}mz} \end{pmatrix}$$

で定めると、

$$\mathcal{V} := \mathbb{C} \times_R \mathbb{C}^2 = L_m \oplus L_{-m} \longrightarrow E_\tau$$

は E_τ 上の *unstable vector bundle* である。

さて、上の定義の安定性 は次の同値な言い換えが出来る ([F-M] を参照)：

定理 2.1 *G を connected な complex reductive Lie 群とし、$Z \subset G$ を G の center の identity を含む connected component とする。また、P_G を G 上の 正則主 G-束 とする。このとき、以下は同値：*

1. *P_G は semi-stable,*
2. *$P_G \times_G (G/Z)$ は semi-stable,*
3. *任意の有限次元既約表現 $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ に対し、$P_G \times_\rho V$ は semi-stable.*

次の定理は、正則 vector bundle を調べる上で基本となる定理である：

定理 2.2 (H-N) *$\mathcal{V}$ を楕円曲線 E_τ 上の正則 vector bundle とする。このとき、$\mathcal{V}$ には、次の性質を満たす vector sub-bundle の filtration*

$$0 = \mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$$

が unique に存在する:

1. *$\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ は semi-stable.*
2. *$\mu(\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_0) > \mu(\mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1) > \cdots > \mu(\mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1})$.*

これは、 ***Harder-Narasimhan filtration*** と呼ばれている。

補注 2.1

1. 上の定理で、$\mathcal{V}$ が *semi-stable* ならば、$k = 1$ である。
2. *Harder-Narasimhan filtration* は、コンパクト *Riemann* 面上で成り立つのであるが、E_τ 上では更に、次の *splitting* が存在する：

$$\mathcal{V} \cong \mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1} \oplus \mathcal{V}_{k-1}/\mathcal{V}_{k-2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_0.$$

3. ***Harder-Narasimhan reduction:*** *G を complex reductive Lie group とし、P_G を compact Riemann 面 X 上の holomorphic principal G-bundle とする。このとき、Harder-Narasimhan filtration を保つ G の parabolic 部分群 P に対し、 P-bundle ξ_P であって、$\xi_P \times_P G \cong \xi$ なるものが存在する。 また、$\xi_P \hookrightarrow \xi$ である。このとき、P を ξ の Harder-Narasimhan parabolic といい、ξ_P を ξ の Harder-Narasimhan reduction、という。*

さて、楕円曲線の場合、補注 2.1 により更に強い reduction が存在する：

定理 2.3 (F-M, H-S2) *G を connected な complex reductive Lie 群とし、P_G を E_τ 上の unstable holomorphic principal G-bundle とする。L' を G の reductive 部分群 であって、P_G の holomorphic principal L'-bundle への reduction $P_{L'}$ が semi-stable になるものとする。このとき、次を満たす G の reductive 部分群 L が共役を除いて一意的に存在する：*

1. $L' \subset L$.
2. P_G は *semi-stable holomorphic principal L-bundle P_L に reduce 出来、これは Harder-Narasimhan reduction を与える。*
3. $P_L \cong P_{L'} \times_{L'} L$.

この定理により、elliptic curve E_τ 上の 正則主 G-束 P_G は semi-stable holomorphic L-bundle P_L に reduce 出来る。これも正則主 G-束 P_G の **Harder-Narasimhan reduction** と呼ぶことにする。

さて、次に P_G の Atiyah-Bott type と呼ばれる topological type を定義しよう。定理 1.1 より、P_G の topological type は $\pi_1(G)$ の元で parametrize されるが、G が connected 且つ simply connected な simple Lie 群 ならば、trivial な情報しか得られない。そこで、P_L への reduction を用いて P_G の第 2 の topological type を定義する。

以下、G は、connected 且つ simply connected な simple Lie 群とし、P_L を E_τ 上の holomorphic principal G-bundleP_G の H-N reduction とする。$S := (L, L)$ を L の commutator subgroup とし、次の短完全列を考える：

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow L \xrightarrow{\pi_S} A := L/S \longrightarrow 1$$

$\pi_2(A) = 0$ ゆえ、次の完全列を得る：

$$0 \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(L) \xrightarrow{\pi_{S*}} \pi_1(A) \longrightarrow 0.$$

このとき、次の事実が知られている：

補題 2.4 *1. $\pi_1(S)$ は有限群である。*

2. $\pi_1(L) \cong \pi_1(S) \times \pi_1(A)$.

ここで、P_L の topological type を $\gamma(P_L) \in \pi_1(L)$ とし、(cf. 定理 1.1) 、

$$\mu(P_G) := \pi_{S*}(\gamma(P_L)) \in \pi_1(A)$$

とおく。これを P_G の **Atiyah-Bott type** と呼ぶ。ここで、

$$\mu(P_G) \in \pi_1(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^*, A) = X_*(A)$$

である。但し、$X_*(A)$ は A の **co-character lattice**, つまり **coroot lattice** であり、これは勿論 $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ の部分集合であるに注意する。

補注 2.2 *1. semi-stable* 主 G- 束に対して、$\mu(P_G) = 0$ である。

2. $P_A := P_L \times_L A = P_L \times_L (L/S)$ は E_τ 上の *holomorphic principal A-bundle* であり、任意の $\chi \in X^*(A) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(A, \mathbb{C}^*)$ (*: character lattice*) に対し、*line bundle* $L_\chi := P_A \times_\chi \mathbb{C} \longrightarrow E_\tau$ の *degree* は次を満たす：

$$\langle \chi, \mu(P_G) \rangle = c_1(L_\chi).$$

さて、実際に Atiyah-Bott type $\mu(P_G)$ を計算する際の注意を与えておこう。
$Z \subset L$ を L の center の identity を含む connected component とすると、写像

$$\pi_S|_Z : Z \longrightarrow A \cong Z/Z \cap S$$

は covering map になっており、(実際、finite cover になっている、) その誘導する射

$$(\pi_S|_Z)_* : \pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(A)$$

は injective である。特に、この射 は full rank であることから、次の同型を誘導する：

$$\pi_1(Z) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_1(A) \otimes \mathbb{Q}$$

これによって、$\pi_1(A)$ を $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(L)$ の部分集合と見なす、つまり、次の射の合成によって、$\pi_1(A) \subset \mathfrak{g}$ と見なす：

$$\pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(Z) \otimes \mathbb{Q} = X_*(Z) \otimes \mathbb{Q} \subset \mathfrak{g}$$

補注 2.3 次の最も簡単な場合について考察する：

$$Z = \mathbb{C}^* \longrightarrow A = \mathbb{C}^*; \qquad z \longmapsto z^d.$$

この場合、基本群の間に誘導される射は $\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(A)$; $\mathbf{1}_Z \longmapsto d\mathbf{1}_A$ となるので、上の対応は、次の様に書ける：

$$\pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(Z) \otimes \mathbb{Q}; \qquad \mathbf{1}_A \longmapsto \frac{1}{d}\mathbf{1}_Z.$$

さて、Atiyah-Bott type は reduction の取り方に依らない。つまり、E_τ 上の holomorphic principal G-bundle P_G の 勝手な semi-stable reduction を $P_{L'}$ とし、P_L を P_G の Harder-Narasimhan reduction であって、$L' \subset L$ を満たす物とする 。 (cf. 定理2.3) このとき、次の補題が成り立つ：

補題 2.5

$$\mu(P_G) = \pi_{S*}(\gamma(P_L)) = \pi_{S*}(\gamma(P_{L'})) \in \mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L) \subset \mathfrak{g}.$$

3 Automorphic factor と Atiyah-Bott type

この section では、E_τ 上の line bundle の automorphic factor (multiplier) の標準形について解説する。先ず始めに、 Appell-Humbert の定理 を紹介する。

$k \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$R_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

を $R_k(z) := e^{-2\pi\sqrt{-1}kz}$ とし、 automorphic factor

$$R_k : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\begin{cases} R_k(m,z) = 1 & m \in \mathbb{Z}, \\ R_k(\tau,z) = R_k(z), \end{cases}$$

を満たす様に recursive に構成すると、簡単な計算から、R_k は次の記述を持つ：

$$R_k(m+n\tau,z) = e^{-2\pi\sqrt{-1}k\{nz+\frac{1}{2}n(n-1)\tau\}}. \tag{2}$$

補注 3.1 (2) より、$R_k(m+n\tau,z+1) = R_k(m+n\tau,z)$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ。従って、任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し、

$$R_k^\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* =: G; \qquad z \longmapsto R_k(\gamma,z)$$

は、$R_k^\gamma(0) = R_k^\gamma(1)$ を満たす、つまり、$[R_k^\gamma] \in \pi_1(G)$ と思える。

ここで、E_τ 上の Line bundle $L_k := \mathbb{C} \times_{R_k} \mathbb{C}$ の Chern class に対して次が成り立つ：

補題 3.1 $c_1(L_k) = k$.

次に、automorphic factor $R : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ であって、E_τ 上の Line bundle $L := \mathbb{C} \times_R \mathbb{C}$ で、$c_1(L) = k$ となるような R の標準形 (up to gauge 変換で) として次のものが取る (小林 [K] を参照)：

命題 3.2 (Appell-Humbert) $R : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を *automorphic factor* とする。このとき、$k \in \mathbb{Z}$ 及び、*character* $\chi : \Gamma \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ であって、

$$R(m+n\tau,z) = \chi(m+n\tau) \cdot e^{-2\pi\sqrt{-1}k(nz+\frac{1}{2}n(n-1)\tau)}$$

となるものが、*up to gauge* 変換で、存在する。

我々の目的の為に、次の事を指摘しておく：

補注 3.2 $G = (\mathbb{C}^*)^s$ なる一般化について述べておこう。$R : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^s$ を *automorphic factor* とするとき、$R(\gamma,z) = (R_1(\gamma,z), \cdots, R_s(\gamma,z))$ と記すと、各 $1 \leq j \leq s$ に対し、

$$R_j(m+n\tau,z) = \chi_j(m+n\tau) \cdot e^{-2\pi\sqrt{-1}k_j(nz+\frac{1}{2}n(n-1)\tau)}$$

なる記述を持つ。実際、$L_j := \mathbb{C} \times_{R_j} \mathbb{C}$ とおくと、$\mathbb{C} \times_R \mathbb{C}^s \cong \bigoplus_{j=1}^s L_j$ ゆえ、*line bundle* の場合に議論は帰着する。

以上の準備のもとで、automorphic factor と Atiyah-Bott type の関係を調べる。G を connected かつ simply connected な simple complex Lie group とし、P_G を E_τ 上の holomorphic principal G-bundle、$P_L \hookrightarrow P_G$ を P_G の Harder-Narasimhan reduction とする。このとき、Automorphic factors

$$\begin{aligned} R_G &: \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow G, \\ R_L &: \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow L, \end{aligned}$$

であって、$P_G = \mathbb{C} \times_{R_G} G$, $P_L = \mathbb{C} \times_{R_L} L$ なるものが存在する。定義より $P_G \cong P_L \times_L G$ であるから、次の補題が成り立つ：

補題 3.3 $g \in G(\mathbb{C}) := \{g : \mathbb{C} \longrightarrow G :\ \textit{holomorphic}\}$ であって、次の性質満たすものが存在する：

$$R_L(\gamma, z) = g(z+\gamma) R_G(\gamma, z) g(z)^{-1} \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

ここで、$S := (L, L), A := L/S$ とし、$Z \subset L$ を L の center の単位元を含む connected component とする。$\overline{S} := L/Z$ は semi-simple であり、

$$P_{\overline{S}} := P_L \times_L \overline{S} = P_L \times_L (L/Z)$$

は、定理 2.1 より semi-stable $\overline{S}$-bundle である。更に、$\overline{S}$ が semi-simple である事と、Weil の定理（E_τ 上の indecomposable holomorphic vector bundle $\mathcal{V}$ が flat であるための必要充分条件は $\deg(\mathcal{V}) = 0$）を用いると次が成り立つ：

命題 3.4 $\mathrm{ad}(P_{\overline{S}})$ は *flat holomorphic vector bundle* である。

[Az-Bi] の命題 2.2 より、次の系を得る：

系 3.5 $P_{\overline{S}}$ は *flat connection* を持つ。

従って、$P_{\overline{S}}$ を定める automorphic factor に関して、次の系が従う：

系 3.6 $\pi_Z : L \to \overline{S} := L/Z$ とおくと、

$$R_{\overline{S}} : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow \overline{S}; \qquad (\gamma, z) \longmapsto \pi_Z(R_L(\gamma, z))$$

は $P_{\overline{S}}$ の *automorphic factor* である。このとき、*holomorphic map* $g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{S}$ であって、

$$R_{\overline{S}}(\gamma) = g(z+\gamma) R_{\overline{S}}(\gamma, z) g(z)^{-1} \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma$$

が z に関して定数になるようなものが存在する、即ち、*automorphic factor* $R_{\overline{S}}(\gamma, z)$ は *constant* に *gauge* 変換で移せる。

ここで、$a(\gamma, z) := R_L(\gamma, z) R_L(\gamma, 0)^{-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \pi_Z(a(\gamma, z)) &= \pi_Z(R_L(\gamma, z)) \cdot \pi_Z(R_L(\gamma, 0)^{-1}) \\ &= R_{\overline{S}}(\gamma) \cdot R_{\overline{S}}(\gamma)^{-1} = e \end{aligned}$$

となり、a は

$$a : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow Z$$

なる holomorphic map であることが従う。定義より、

$$R_L(\gamma, z) = a(\gamma, z) R_L(\gamma, 0)$$

となるが、このことから次の補題が従う：

補題 3.7 *Holomorphic map* $a : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow Z$ は次の性質を持つ： 任意の $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対し、

1. $a(\gamma, \gamma') a(\gamma + \gamma', z) = a(\gamma, z + \gamma') a(\gamma', z)$,
2. $a(0, z) = a(\gamma, 0) = e$,
3. $a(-\gamma, \gamma) = a(\gamma, -\gamma)$.

ここで、次の写像について考察しよう：

$$\begin{tikzcd} \pi_S : & L \arrow[r] & A = L/S \\ & \cup & \\ & Z \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

この射は、準同型ゆえ

$$\pi_S(R_L(\gamma, z)) = \pi_S(a(\gamma, z)) \cdot \pi_S(R_L(\gamma, 0))$$

となる。そこで、$R_A(\gamma, z) := \pi_S(R_L(\gamma, z))$ とおくと、

$$R_A : \Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow A \cong (\mathbb{C}^*)^s$$

は、$P_A := P_L \times_L A$ の automorphic factor である。よって、

$$R_A(\gamma, z) = (R_1(\gamma, z), \cdots, R_s(\gamma, z))$$

と書くと、Appell-Humbert の定理 より、$1 \leq j \leq s$ に対し、整数 $k_j \in \mathbb{Z}$ 及び Γ の character χ_j であって、$R_j(\gamma, z) = \chi_j(\gamma) e^{-2\pi\sqrt{-1} k_j (nz + \frac{1}{2} n(n-1)\tau)}$ となるものが 存在する。但し、$\gamma = m + n\tau \in \Gamma$ であり、(適当に gauge 変換を施したものを考えるものとする。そこで、$\overline{a}(\gamma, z) := \pi_S(a(\gamma, z))$ 及び $\overline{R}_L(\gamma) := \pi_S(R_L(\gamma, 0))$ とおくと、定義より $R_A(\gamma, z) = \overline{a}(\gamma, z) \cdot \overline{R}_L(\gamma)$ であり、再度定義より

$$\begin{aligned} \overline{a}(\gamma, z) &= (e^{-2\pi\sqrt{-1} k_1 nz}, \cdots, e^{-2\pi\sqrt{-1} k_s nz}), \\ \overline{R}_L(\gamma) &= \left(\chi_1(\gamma) e^{-2\pi\sqrt{-1} k_1 \cdot \frac{1}{2} n(n-1)\tau}, \cdots, \chi_s(\gamma) e^{-2\pi\sqrt{-1} k_s \cdot \frac{1}{2} n(n-1)\tau}\right), \end{aligned}$$

と書けることが従う。従って、次の補題を得る：

補題 3.8 $\pi_S|_Z : Z \longrightarrow A$ が d-fold cover であるとする。このとき、正の整数 $d_1, \cdots, d_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ であって、

$$a(\gamma, z) = \left(e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{k_1}{d_1}nz}, \cdots, e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{k_s}{d_s}nz}\right) \qquad \gamma = m + n\tau \in \Gamma$$

かつ $d = d_1 d_2 \cdots d_s$ を満たすものが存在する。

この補題の系として、次の命題を得る：

命題 3.9 任意の $\gamma = m + n\tau \in \Gamma$ に対し、次の等式が成り立つ：

$$R(\gamma, z)^{-1}\partial R(\gamma, z) = -2\pi\sqrt{-1}n \cdot \mu(P_G).$$

即ち、gauge 変換を施して automorphic factor を適当に取ると Atiyah-Bott type との関係が付いた。

4 Floquet 対応

この section では、[E-K] に従って、$S^1 \times S^1$ 上の Floquet 対応について解説する。G を connected かつ simply connected な $\mathbb{C}$ 上の simple Lie group とし、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする。

E_τ を $S^1 \times S^1$ と同一視し、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(G) := C^\infty(S^1 \times S^1, G),\\
&\mathcal{E}(\mathfrak{g}) := C^\infty(S^1 \times S^1, \mathfrak{g}),\\
&M(G) := \{R \in \mathrm{Hol}(\Gamma \times \mathbb{C}, G) | R(\gamma + \gamma', z) = R(\gamma, z + \gamma')R(\gamma', z) \quad \forall\, \gamma, \gamma' \in \Gamma.\},
\end{aligned}$$

とおき、

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}) := \{\Phi \in C^\infty(\mathbb{C}, G) | \overline{\partial}(\Phi(z+\gamma)\Phi(z)^{-1}) = 0 \quad \forall\, \gamma \in \Gamma.\}$$

とおく。ここで、$\mathbb{C} = \{z = x + \tau y | x, y \in \mathbb{R}\}$ によって、$\mathbb{C}$ の座標を定めているので、

$$\overline{\partial} = \frac{1}{\tau - \overline{\tau}}(\tau\partial_x - \partial_y), \qquad \partial = -\frac{1}{\tau - \overline{\tau}}(\overline{\tau}\partial_x - \partial_y)$$

である。$\mathcal{S}(\mathbb{C})$ 上への $\mathcal{E}(G)$ 及び $G(\mathbb{C}) := \mathrm{Hol}(\mathbb{C}, G)$ の自然な作用

$$\begin{aligned}
L :& G(\mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C});\\
& (h, \Phi) \quad \longmapsto \quad h.\Phi =: L_h\Phi,\\
R :& \mathcal{E}(G) \times \mathcal{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C});\\
& (g, \Phi) \quad \longmapsto \quad \Phi.g =: R_g\Phi,
\end{aligned}$$

及び、図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}(\mathfrak{g}) & \longleftarrow & \mathcal{S}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M(G)\\
\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi & \longleftarrow\!\shortmid & \Phi & \longmapsto & \Phi(z+\gamma)\Phi(z)^{-1}
\end{array}$$

により、$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 上の $\mathcal{E}(G)$-作用 及び、$M(G)$ 上の $G(\mathbb{C})$-作用が次のように誘導される：

1. $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 上の $\mathcal{E}(G)$-action:

$$\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & h\Phi g \arrow[d, mapsto] \\
\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi \arrow[r, mapsto] & (h\Phi g)^{-1}\overline{\partial}(h\Phi g)
\end{tikzcd}$$

$$= g^{-1}\overline{\partial}g + \mathrm{Ad}(g^{-1})(\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi).$$

この作用は、(0,1)-connection の gauge 変換

2. $M(G)$ 上の $G(\mathbb{C})$-action:

$$\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & h\Phi g \arrow[d, mapsto] \\
\Phi(z+\gamma)\Phi(z)^{-1} \arrow[r, mapsto] & h(z+\gamma)\Phi(z+\gamma)\Phi(z)^{-1}h(z)^{-1}.
\end{tikzcd}$$

この作用は所謂 twisted conjugation に他ならない。

さて、

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \longleftarrow \mathcal{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow M(G)$$

について次の命題が成り立つ；

命題 4.1 *1.* 任意の $A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ に対し、微分方程式 $\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi = A$ を満たす $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ は存在する。

2. 任意の $R \in M(G)$ に対し、差分方程式 $\Phi(z+\gamma) = R(\gamma, z)\Phi(z)$ ($\forall\gamma \in \Gamma$) を満たす $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ は存在する。

この命題により、$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ と $M(G)$ の対応が付いた。これを **Flouqt 対応**と呼ぶ事にする。さて、射

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{g});\ \Phi \longmapsto \Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi,$$
$$\mathcal{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow M(G);\ \Phi \longmapsto \Phi(z+\gamma)\Phi(z)^{-1},$$

は、次の様に factor する：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(\mathfrak{g}) & & \mathcal{S}(\mathbb{C}) \arrow[ll, two heads] \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & M(G) \\
& G(\mathbb{C})\backslash\mathcal{S}(\mathbb{C}) \arrow[ul, two heads] & & \mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G) \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

実は、この図式において、2つの全射

$$G(\mathbb{C})\backslash\mathcal{S}(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{g}), \qquad \mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G) \twoheadrightarrow M(G)$$

は同型である。従って、少なくとも次の図式を得た：

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{S}(\mathbb{C})/G(\mathbb{C}) \twoheadleftarrow \mathcal{S}(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G) \cong M(G). \tag{3}$$

さらに、次の可換図式が考えられる：

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}(\mathbb{C}) \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \arrow[dr, two heads] & & M(G) \cong \mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G) \arrow[dl, two heads] \\
 & G(\mathbb{C})\backslash\mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G) &
\end{tikzcd}$$

この底空間 $G(\mathbb{C})\backslash\mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G)$ は何を表すのだろうか？
$A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ に対して、適当な E_τ の open covering $\{U_i\}$ を取り、$\Phi_i : U_i \longrightarrow G$ を $\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi_i = A$ を満たす C^∞-map とする。ここで、C^∞-map $t_{i,j} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ を $t_{i,j} := \Phi_i\Phi_j^{-1}$ によって定義すると、

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}t_{i,j} =& \overline{\partial}(\Phi_i\Phi_j^{-1}) = \Phi_i(\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi_i)\Phi_j^{-1} - \Phi_i(\Phi_j^{-1}\overline{\partial}\Phi_j)\Phi_j^{-1} \\
=& \Phi_i A\Phi_j^{-1} - \Phi_i A\Phi_j^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

つまり、$t_{i,j}$ は holomorphic になっている。定義より、$\{t_{i,j}\}$ は勿論、1-cocycle condition を満たしているので、$\{t_{i,j}\}$ は holomorphic principal G-bundle を与える。
逆に、$\{t_{i,j} : U_i \cap U_j \longrightarrow G : \text{hol.}\}$ が与えられているとしよう。このとき、C^∞-map $\Phi_i : U_i \longrightarrow G$ であって、$t_{i,j} := \Phi_i\Phi_j^{-1}$ を満たすものを一つ選ぶ。ここで、$A_i := \Phi_i^{-1}\overline{\partial}\Phi_i$ とおくとこれは、U_i 上の G-valued C^∞-map である。ところで、$U_i \cap U_j$ 上、

$$A_i = \Phi_i^{-1}\overline{\partial}\Phi_i = (t_{i,j}\Phi_j)^{-1}\overline{\partial}(t_{i,j}\Phi_j) = \Phi_j^{-1}\overline{\partial}\Phi_j = A_j$$

となっているので、$\{A_i\}$ は E_τ 上 global に定義されている、つまり、$A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ であって、$A|_{U_i} = A_i$ となるものが存在する。ここで、Φ_i の選び方の自由度について考察しておこう。$\Phi_i' : U_i \longrightarrow G$ を C^∞-map であって、$t_{i,j} = \Phi_i'\Phi_j'^{-1}$ を満たすものとし、C^∞-map $g_i : U_i \longrightarrow G$ を $g_i := \Phi_i^{-1}\Phi_i'$ で定義する。このとき、$U_i \cap U_j$ 上、

$$g_i = \Phi_i^{-1}\Phi_i' = (t_{i,j}\Phi_j)^{-1}(t_{i,j}\Phi_j') = \Phi_j^{-1}\Phi_j' = g_j$$

ゆえ、$g \in C^\infty(E_\tau, G)$ であって、$g|_{U_i} = g_i$ となるものが存在し、$\Phi_i' = \Phi_i g$ と書ける。このときの A の変化を観ておこう。$\Phi \longmapsto \Phi g$ によって、

$$A = \Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi \longmapsto (\Phi g)^{-1}\overline{\partial}(\Phi g) = g^{-1}\Phi^{-1}(\overline{\partial}\Phi)g + g^{-1}\overline{\partial}g = g^{-1}\overline{\partial}g + \mathrm{Ad}(g^{-1})A$$

となる。
また、補題 1.2 より、この空間は、E_τ 上の holomorphic principal G-bundle の moduli になっている。即ち、次が成り立つ：

定理 4.2 $\mathrm{Ad}: G(\mathbb{C}) \times M(G) \longrightarrow M(G)$ を

$$\mathrm{Ad}(h(z))R(\gamma, z) := h(z+\gamma)g(z)h(z)^{-1}$$

, $\widehat{\mathrm{Ad}}: \mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ を

$$\widehat{\mathrm{Ad}}(g)(A) := g^{-1}\overline{\partial} g + \mathrm{Ad}(g^{-1})A$$

で定めると、次の *set-theoretic* な同型が成り立つ：

$$\begin{aligned} G(\mathbb{C})\backslash \mathcal{S}(\mathbb{C})/\mathcal{E}(G) &\cong \mathcal{E}(\mathfrak{g})/\mathcal{E}(G) \cong \mathrm{Ad}(G(\mathbb{C}))\backslash M(G) \\ &\cong \{E_\tau \text{ 上の hol. principal } G\text{-bundle}\}/\text{ hol. isom..} \end{aligned}$$

5 Unstable bundle のある特徴付け

ここでは、E_τ 上の unstable principal G-bundle の特徴付けを与える事を目標にする。ここでも G は、connected 且つ simply connectd な semi-simple Lie 群と仮定する。
まず $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の分割について、[A-B] に従って解説する。
$\mu \in \mathfrak{h}$ に対して、

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g})_\mu := \{A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}) | A \text{ の定める hol. principal } G\text{-bundle の Atiyah-Bott type は } \mu\}$$

とおく。このとき、次が成り立つ：

命題 5.1 *1.* $\mathcal{E}(\mathfrak{g})_\mu$ は、$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ において *codim* $2\rho(\mu)$ の部分多様体（*Frechet* の意味で）。ただし、$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$、$\Delta_+$ は $\mathfrak{g}$ の *positive roots* の成す集合である。特に、$\mathcal{E}(\mathfrak{g})_0$ は *open dense* 部分多様体である。

2. $\mathcal{E}(\mathfrak{g})_0^{s.s} = \{A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})_0 | \exists g \in \mathcal{E}(G) s.t. \widehat{\mathrm{Ad}}(g)(A) \in \mathfrak{h}\}$ は、$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の *open dense* 集合である。

次に、$\mathcal{E}(G)$ の $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 上への作用の $\mathfrak{h}$ への制限を考えよう。

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{E}(G)}(\mathfrak{h}) &:= \{g \in \mathcal{E}(G) | \widehat{\mathrm{Ad}}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}, \\ Z_{\mathcal{E}(G)}(\mathfrak{h}) &:= \{g \in \mathcal{E}(G) | \widehat{\mathrm{Ad}}(g)h = h \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}, \end{aligned}$$

とおく。このとき、次の命題が成り立つ：

命題 5.2

$$N_{\mathcal{E}(G)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathcal{E}(G)}(\mathfrak{h}) \cong W_{\mathrm{ell}}.$$

但し、$W_{\mathrm{ell}} := W_f \ltimes (Q^\vee \oplus \tau Q^\vee)$, W_f は 有限 *Weyl* 群であり、$Q^\vee$ は *coroot lattice* である。この W_{ell} を**楕円型 Weyl 群**と呼ぶ。*([S]* を参照)

そこで、section4 で得た $\mathcal{E}(G)$ の $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ への作用を、$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}) := \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{C}^*$ への作用に拡張する。

ξ を G の Maurer-Cartan form とし、G 上の 3-form σ を次で定義する：

$$\sigma := \frac{1}{24\pi^2}(\xi \wedge d\xi).$$

ST を solid torus であって、$\partial ST = E_\tau$ となるもとする。
$\forall g \in \mathcal{E}(G)$ に対し、$\overline{g} \in C^\infty(ST, G)$ であって、$\overline{g}|_{E_\tau} = g$ となるものが存在する。そこで、

$$\lambda(g) := \int_{ST} \overline{g}^* \sigma \tag{4}$$

とおくと、これは mod $\mathbb{Z}$ で $\overline{g}$ の選び方に依らない。従って、特に $e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda(g)}$ は $\overline{g}$ の選び方に依らない。([河野] を参照)

次に、$A, B \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ に対し、

$$(A|B) := -\frac{\tau - \overline{\tau}}{4\pi^2}\int_{I^2}(A, B)dx \wedge dy,$$

とおく。但し、(A, B) は pointwise に normalized invariant form をとるものとする。以上を用いて、$\mathcal{E}(G)$ の $\widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g})$ への作用を次の式で定義する：

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad} : \mathcal{E}(G) \times \widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}) \\ (g, (A, u)) &\longmapsto \left(\widehat{\mathrm{Ad}}(g)(A), u \cdot e^{-2\pi\sqrt{-1}\{(A|\partial_x g \cdot g^{-1}) + \frac{1}{2}(g^{-1}\overline{\partial} g | g^{-1}\partial_x g)\}} \times e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda(g)}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

この作用は、楕円型 Weyl 群の $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}^*$ 上への作用を induce し、その不変式環の生成元として affine Lie 環の指標 $\chi_0, \chi_1, \cdots \chi_l$ が取れる。ただし、$\mathrm{rk}\mathfrak{g} = l$ である。([S] を参照)
指標達は、Frechet 空間 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 上の正則関数の定義より、$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の open dense 部分多様体 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})_0^{s.s}$ へ $\mathcal{E}(G)$-作用を用いて拡張され、さらに陰関数定理を用いて $\mathcal{E}(\mathfrak{g})_0$、命題 5.1(1) より $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 全体へ正則関数として拡張される。(この事実は、同僚の鈴木範男氏に指摘いただいた。) 従って、次の定理を得る：

定理 5.3 $\mathrm{rk}\mathfrak{g} = l$ とし、$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}) := \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{C}^*$ とおく。このとき、$\mathcal{E}(G)$-*invariant* な正則写像

$$\chi : \widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}^{l+1}$$

が存在する。

$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$、$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g})$ 上への $\mathcal{E}(G)$-作用に関する centralizer を $A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$、$u \in \mathbb{C}^*$ に対して、

$$Z_{\mathcal{E}(G)}(A) := \{g \in \mathcal{E}(G) | \widehat{A}d(g)(A) = (A)\}$$

$$Z_{\mathcal{E}(G)}(A, u) := \{g \in \mathcal{E}(G) | \widetilde{A}d(g)(A, u) = (A, u)\}$$

とおく。また、$Z_{\mathcal{E}(G)}(A)$ の Lie 環を

$$Z_{\mathcal{E}(\mathfrak{g})}(A) = \{X \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}) | [\overline{\partial} - A, X] = 0\}$$

とおく。更に、$A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ に対して、$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ を $\Phi^{-1}\overline{\partial}\Phi = A$ を満たすものとし、$R(\gamma, z) = \Phi(z+\gamma)\Phi(z)^{-1} \in M(G)$ とおく。(この存在は、Floquet 対応より保証されている。) このとき、

$$H^0(\mathbb{C}, \mathrm{ad}(\pi^* P_G))^R := \{Y \in H^0(\mathbb{C}, \mathrm{ad}(\pi^* P_G)) | \mathrm{Ad}(R(\gamma, z))Y(z) = Y(z+\gamma)\}.$$

とおき、

$$\varphi_\Phi : H^0(\mathbb{C}, \mathrm{ad}(\pi^* P_G))^R \longrightarrow Z_{\mathcal{E}(\mathfrak{g})}(A); \qquad Y \longmapsto \mathrm{Ad}(\Phi^{-1})Y$$

と定義すると、これは、Lie 環の同型写像となる。ただし、$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow E_\tau$ であり、$\pi^* P_G$ は π による E_τ 上の holomorphic principal G-bundle の $\mathbb{C}$ への引き戻しである。

さて、条件 $\widetilde{Ad}(g)(A, u) = (A, u)$ は次の 2 条件と同値：

1. $g \in Z_{\mathcal{E}(G)}(A)$,
2. $e^{-2\pi\sqrt{-1}\{(A|\partial_x g \cdot g^{-1}) + \frac{1}{2}(g^{-1}\overline{\partial} g | g^{-1}\partial_x g)\}} \times e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda(g)} = 1.$

条件 2. を infinitesimal に考察してみよう。
$X \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ に対し $g_t := e^{tX}$ とおくとき、$g_t \in Z_{\mathcal{E}(G)}(A)$ であるための必要充分条件は $X \in Z_{\mathcal{E}(\mathfrak{g})}(A)$ である。このとき、

$$f_{A,X}(t) := e^{-2\pi\sqrt{-1}\{(A|\partial_x g_t \cdot g_t^{-1}) + \frac{1}{2}(g_t^{-1}\overline{\partial} g_t | g_t^{-1}\partial_x g_t)\}} \times e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda(g_t)}$$

とおくと、$\widetilde{Ad}(g) \cdot \widetilde{Ad}(g') = \widetilde{Ad}(g'g)$ かつ $g_t \in Z_{\mathcal{E}(G)}(A)$ より、

$$f_{A,X}(s) f_{A,X}(t) = f_{A,X}(s+t)$$

が成り立つ。従って、$\alpha(A, X) \in \mathbb{C}$ であって、$f_{A,X}(t) = e^{-2\pi\sqrt{-1}\alpha(A,X)t}$ となるものが存在する。定義より、

$$\alpha(A, X) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_{A,X}(t) = (A|\partial_x X)$$

である。(他の項は t について高次である事に注意せよ。) このとき、次が成り立つ：

補題 5.4 *1.*

$$(A|\partial_x X) = \frac{1}{4\pi^2}\left[-\int_{I_x \times \{0\}_y} (R_\tau^{-1}\partial R_\tau, h)dx + \tau \int_{\{0\}_x \times I_y} (R_1^{-1}\partial R_1, h)dy\right].$$

但し、$X = \varphi_\Phi(h) = \mathrm{Ad}(\Phi^{-1})h$, $h \in H^0(\mathbb{C}, \mathrm{ad}(\pi^* P_G))^R$ 、$R_\gamma(z) := R(\gamma, z)$ である。

2. $h \in G(\mathbb{C})$ に対して、$R'(\gamma, z) := h(z+\gamma)R(\gamma, z)h(z)^{-1}$ とおくとき、

$$\frac{1}{4\pi^2}\left[-\int_{I_x\times\{0\}_y}(R_\tau^{-1}\partial R_\tau, h)dx + \tau\int_{\{0\}_x\times I_y}(R_1^{-1}\partial R_1, h)dy\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[-\int_{I_x\times\{0\}_y}({R'}_\tau^{-1}\partial {R'}_\tau, h)dx + \tau\int_{\{0\}_x\times I_y}({R'}_1^{-1}\partial {R'}_1, h)dy\right]$$

が成り立つ。即ち、上の積分は、*gauge* 変換に依らない。

この補題より、次の主定理を得る：

定理 5.5 $A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ が *unstable* であるための必要充分条件は、

$$(A, 1) \in \chi^{-1}(0)$$

である。

証明 $A \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ に対応する holomorphic principal G-bundleP_G は unstable とする。このとき、H-N reduction P_L が存在する。ここで、L は G の Levi 部分群であるから、L の Lie 環 $\mathfrak{l}$ は、次の分解を持つ：

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{c}$$

ただし、$\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{l}$ の semi-simple subalgebra、$\mathfrak{c}$ は center である。従って、P_L は直積

$$ad(P_L) = (P_L \times_L \mathfrak{s}) \times (E_\tau \times \mathfrak{c})$$

に分解する。Atiyah-Bott type $\mu(P_G)$ は、中心 $\mathfrak{c}$ の元であったから、

$$\mu(P_G) \in H^0(\mathbb{C}, \pi^* ad(P_L))^R \subseteq H^0(\mathbb{C}, \pi^* ad(P_G))^R$$

である。そこで、$X; = \varphi_\Phi(\mu(P_G)) \in Z_{\mathcal{E}(\mathfrak{g})}(A)$、$g_t := e^{tX} \in Z_{\mathcal{E}(G)}(A)$ とおくと、補題 5.4 と命題 3.9（automorphic factor と Atiyah-Bott type の関係式）より、

$$\chi_j(\widetilde{Ad}(g_t)(A, 1)) \qquad (j = 0, 1, \cdots l)$$
$$= \chi_j(A, e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{1}{4\pi^2}\left[-\int_{I_x\times\{0\}_y}(R_\tau^{-1}\partial R_\tau, t\mu(P_G))dx + \tau\int_{\{0\}_x\times I_y}(R_1^{-1}\partial R_1, t\mu(P_G))dy\right]})$$
$$= \chi_j(A, e^{-2t(\mu(P_G), \mu(P_G))}) = e^{-2td_j(\mu(P_G), \mu(P_G))}\chi((A, 1))$$

ただし、$d_0, d_1, \cdots, d_l$ は、基本指標 $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_l$ の次数であり,$d_j > 0$ を満たしている。一方、χ_j は、$\mathcal{E}(G)$-不変であったから

$$\chi_j(A, 1) = \chi_j(\widetilde{Ad}(g_t)(A, 1)).$$

従って、

$$\chi_j(A, 1) = e^{-2td_j(\mu(P_G), \mu(P_G))}\chi((A, 1)).$$

$(\mu(P_G), \mu(P_G)) \neq 0$ より、

$$\chi_j((A,1)) \neq 0 \qquad (j=0, j=1,\cdots,l)$$

を得る。

逆は、Looijenga[L] より得られる。 □

この定理は、すでに [A-F-L] により得られているが、設定が不完全と思われる。この定理より、E_τ 上の semi-stable principal G-bundle の coarse module が Lie 環論的に得られる。また、例 2.1 に於いて、m=2 の場合が、$A_1^{(1,1)}$ 型の単純楕円特異点と関係する。($\tilde{D}_5$ 型単純楕円特異点の一部) この事実は、P.Slodowy により 1998 年頃発見され、彼らの仕事 [S-H1],[S-H2] のきっかけとなった。

私の散漫な結果を多大なご苦労でまとめてくださった庵原氏（神戸大）に感謝します。
このノートは、P.Slodowy への未だ持って未提出のレポートの 1 部分です。

参考文献

[A-B] Atiyah M. F. and Bott R., *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London **A 308**, (1982), 532–615.

[Az-Bi] Azad H. and Biswas I., *On Holomorphic Principal Bundles over a Compact Riemann Surface Admitting a Flat Connection,* II, Bull. London Math. Soc. **35**, (2003), 440–444.

[A-F-L] Asorey M., Falceto F. and Luzon G., *Unstable Bundles in Quantum Field Theory*, Contemporary Math. **17** (1998) 1-15

[E-F] Etingof P. and Khesin B.A., *Affine Gel'fand-Dickey brackets and holomorphic vector bundles*, Geom. Funct. Anal.,**4** (1994), 429-444

[F-M] Friedman R., and Morgan J., *Holomorphic Principal Bundles over elliptic curves*, Duke eprint math. AG/9811130

[H-N] Harder G. and Narasimhan M. S., *On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves*, Math. Ann. **212**, (1975), 215–248.

[H-S1] Helmke S. and Slodowy P., *Loop groups, principal bundles over elliptic curves and elliptic singularities*, Geometry and Topology of Caustics-Caustics '02 Banach Center Publ. Vol **62**,87-99, Inst. of Math. Polish Academy of Sci. Warszawa 2004 .

[H-S2] Helmke S. and Slodowy P., *On Unstable Principal Bundles over Elliptic Curves*, Publ. R.I.M.S. **37**, (2001), 349–395.

[K] Kobayashi S. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles* Iwanami Shoten, Publ. and Princeton Univ. Press 1987

[河野] 河野俊丈場の理論とトポロジー岩波書店, 岩波講座, 現代数学の展開,22

[Lo] Looijenga E., *Root Systems and Elliptic Curves*, Invent. Math. **38**, (1976), 17–32.

[S] Saito K., *Extended Affine Root System II (Flat Invariants)*, Publ. RIMS., Kyoto Univ., **26** (1990), 15-78

[Y] Yamada, H., *Lie group theoretical construction of period mappings*, Math. Z., 220 no.2 (1995), 231–255.